Eine gängige Anwendung der Differentialrechnung ist die Optimierung einer Zielgröße. Optimierung bedeutet in diesem Sinne die Suche nach einem möglichst großen oder möglichst kleinen Wert. Beispiele sind die Suche nach einer minimalen Oberfläche, einem minimalen Volumen oder auch minimalen Kosten. In anderen Fällen könnte beispielsweise ein maximales Volumen oder auch maximaler Gewinn von Interesse sein.

Die Vorgehensweise zum Lösen solcher Fragen soll hier an zwei einfachen Beispielen aufgezeigt werden. Ein Schäfer möchte für seine Herde ein rechteckiges Feld umzäunen. Hierzu kann er diese Überlegungen anstellen: (Beispiel 1) er möchte 100 m Zaun verbauen. Das Feld ist für ihn optimal gestaltet, wenn er möglichst wenig Arbeit damit hat. Er möchte also eine möglichst große Fläche umzäunen, denn dann können seine Schafe dort länger bleiben, bevor er ein neues Feld abstecken muss. Er könnte auch so herum argumentieren: (Beispiel 2) eine Fläche von 400 m² reicht für seine Schafe für eine Woche, die wenigste Arbeit hat er damit, wenn er möglichst wenig Zaun aufstellen muss. In beiden Fällen sind Länge (L) und Breite (B) des Feldes zu bestimmen.

Generelle Vorgehensweise	Beispiel 1 (100 m Zaun, Fläche maximal)	Beispiel 2 (400 m² Feld, Zaunlänge minimal)
1) Randbedingungen festlegen Aus geometrischen oder sonstigen Rahmenbedingungen sind gesuchte Werte oftmals nach unten, nach oben oder in beide Richtungen in ihrer Größe beschränkt.	Da L und B beide Längen eines Feldes sein sollen, müssen beide zwangsläufig positiv sein. Wenn das Feld sehr schmal wird, dann kann weder L noch B länger als 50 m werden, sonst reicht der Zaun nicht mehr für den Rückweg. $0 < B < 50$ **und** $0 < L < 50$	Wie in Beispiel 1 müssen L und B positiv sein. Eine Begrenzung nach oben gibt es hier nicht, weil die 400 m² Feld immer abgesteckt werden können. Wenn eine Seite sehr schmal wird, dann muss die andere eben sehr groß werden. Und es steht ja (zumindest theoretisch) beliebig viel Zaun zur Verfügung. $0 < B$ **und** $0 < L$
2) Hauptbedingung festlegen Die Hauptbedingung ist eine Gleichung, die die zu optimierende Größe berechnet. Üblicherweise hängt die Hauptbedingung von 2 oder mehr Variablen ab. Jede Variable drückt eine Gestaltungsmöglichkeit, d.h. einen Freiheitsgrad, des Problems aus.	Die zu optimierende Größe ist die Fläche A. Da es sich hier um ein Rechteck handelt, berechnet sich die Fläche zu: $A = L \cdot B$ Hier gibt es als 2 Freiheitsgrade. Zunächst einmal können beliebige Werte innerhalb der Randbedingungen gewählt werden und für jede Kombination von L und B ergibt sich dann eine bestimmte Fläche.	Die zu optimierende Größe ist die Zaunlänge Z. Da es sich um ein Rechteck handelt, entspricht die Zaunlänge dem Umfang: $Z = 2L + 2B$ Auch hier gibt es zwei Freiheitsgrade und zunächst ist erst einmal jede Kombination von L und B innerhalb der Randbedingungen zulässig.
3) Nebenbedingungen festlegen Jede Nebenbedingung schränkt einen Freiheitsgrad ein. Es werden so viele Nebenbedingungen benötigt, dass die Hauptbedingung nur noch einen Freiheitsgrad hat. Bei 2 Freiheitsgraden also 1 Nebenbedingung, bei 3 Freiheitsgraden 2 Nebenbedingungen, usw.	Hier ist die Nebenbedingung, dass nur 100 m Zaun verbaut werden sollen. Die Zaunlänge entspricht dem Umfang: $100 = 2L + 2B$ Da diese Bedingung erfüllt sein soll ist nicht mehr jede Kombination von L und B möglich; ein Freiheitsgrad wird eingeschränkt.	In diesem Fall ist die Nebenbedingung die geforderte Fläche des Feldes: $400 = L \cdot B$ Auch hier sorgt diese Gleichung dafür, dass die Kombination von L und B nicht mehr beliebig ist.
4) Zielfunktion bestimmen Die Zielfunktion ist die Hauptbedingung, in die die Gleichungen aus den Nebenbedingungen so umgestellt und eingesetzt sind, dass eine Funktionsgleichung mit nur noch einer Variablen entsteht.	Die Nebenbedingung kann hier beispielsweise nach L umgestellt werden: $L = 50 - B$ Durch Ersetzen von L in der Hauptbedingung ergibt sich die Zielfunktion: $A(B) = (50 - B) \cdot B$ $A(B) = 50B - B^2$	Hier kann die Nebenbedingung auch nach L umgestellt werden: $L = 400/B$ Durch Ersetzen von L in der Hauptbedingung ergibt sich die Zielfunktion mit den entsprechenden Rechenregeln für Exponenten: $Z(B) = 2(400/B) + 2B$ $Z(B) = 800 \cdot B^{-1} + 2B$

5) Extremwerte bestimmen Kandidaten für Extremwerte, also Maxima oder Minima, einer Funktion liegen bei Nullstellen der ersten Ableitung	Mit den Ableitungsregeln: $\mathbf{A'(B) = 50 - 2B}$ Die Nullstelle der Ableitung: $\mathbf{50 - 2B_{extr.} = 0}$ $\mathbf{B_{extr.} = 25}$	Mit den Ableitungsregeln: $\mathbf{Z'(B) = -800 \cdot B^{-2} + 2}$ Die Nullstelle der Ableitung mit den passenden Rechenregeln für die Exponenten: $\mathbf{-800 \cdot B_{extr.}^{-2} + 2 = 0}$ $\mathbf{B_{extr.} = \pm 20}$
6) Randbedingungen einhalten Die Kandidaten für Extremwerte müssen die Randbedingungen erfüllen. Es ist möglich, dass keiner, einer, mehrere oder auch alle Kandidaten für Extremwerte hier verworfen werden müssen.	$B_{extr.} = 25$ liegt innerhalb des zulässigen Bereichs, kann also weiter betrachtet werden.	$B_{extr.} = -20$ liegt nicht innerhalb des zulässigen Bereichs, ist also zu verwerfen. Für die weiteren Betrachtungen kommt nur $B_{extr.} = 20$ infrage.
7) Maximum oder Minimum feststellen Mithilfe der zweiten Ableitung oder einem sonstigen geeigneten Verfahren oder einer geeigneten Argumentation wird überprüft, ob es sich bei den übrigen Kandidaten für Extremwerte um Minima oder Maxima entsprechend der Fragestellung handelt.	Für die Randwerte von B ergibt die Fläche des Feldes A(0)=0 und A(50)=0. Dazwischen ist sowohl B als auch (50-B) überall positiv. D.h. A(B)>0 im gesamten Gültigkeitsbereich. Auch ist A(B) eine Parabel und somit stetig. Es kann sich also nur, wie gefordert, um ein Maximum bei $\mathbf{B_{max} = 25}$ und $\mathbf{A(25) = 625 = A_{max}}$ handeln.	Mit den Ableitungsregeln: $\mathbf{Z''(B) = 1600 \cdot B^{-3}}$ und $\mathbf{Z''(20) = 0{,}2 > 0}$ Es handelt sich entsprechend wie gefordert um ein Minimum bei $\mathbf{B_{min} = 20}$ und $\mathbf{Z(20) = 80 = Z_{min}}$
8) Randwerte überprüfen Wenn beispielsweise nach einem Maximum gesucht wird, aber innerhalb der Randbedingungen nur ein Minimum gefunden wurde, dann muss einer der beiden Randwerte der Variablen der Zielfunktion die optimale Lösung darstellen. Es gibt aber viele denkbare Szenarien, in denen trotz gesuchtem und gefundenem Maximum innerhalb der Randbedingungen der Randwert eine bessere Lösung darstellt. Randwerte müssen daher immer überprüft werden.		Wenn B nach 0 strebt, dann wird L=400/B unendlich groß, also mehr als 80 m. Und wenn B unendlich groß wird, dann ist alleine deswegen die Zaunlänge schon größer als 80 m. Die Randwerte stellen hier also keine bessere Lösung dar.
9) Übrige Variablen berechnen Aus den Gleichungen der Nebenbedingungen können die übrigen Variablen berechnet werden.	Aus $\mathbf{L_{max} = 50 - B_{max}}$ $\mathbf{L_{max} = 25}$ die letzte verbleibende Variable.	Aus $\mathbf{L_{min} = 400/B_{min}}$ $\mathbf{L_{min} = 20}$ die letzte verbleibende Variable.
10) Optimale Lösung(en) zusammenfassen Ein geeigneter Satz oder sonstige Darstellung schließt die Problemstellung zusammenfassend ab.	Mit 100 m Zaun lassen sich **maximal 625 m² Feld** umzäunen. Dieses Feld hat die Maße **25 m x 25 m** Es handelt sich also um ein Quadrat.	Für ein Feld von 400 m² benötigt man **mindestens 80 m Zaun** zum Umzäunen. Dieses Feld hat die Maße **20 m x 20 m** Es handelt sich also um ein Quadrat.